Σειρά Προβλημάτων 2 – Λύσεις

Άσκηση 1

Να δώσετε κανονικές εκφράσεις που να περιγράφουν τις πιο κάτω γλώσσες.

(i) { w | η w είναι μια λέξη επί του αλφάβητου {0,1} η οποία αναπαριστά ένα ακέραιο σε δυαδική μορφή που είναι πολλαπλάσιο του 4 }

(ii) { w∈{*a*,*b*}* | η w περιέχει τη συμβολοσειρά *ab* ακριβώς 2 φορές αλλά όχι στο τέλος }

(iii) { w ∈ {0,1,2}* | w = uxvx, όπου x ∈ {0,1,2}, u,v ∈ {0,1,2}* και δεν υπάρχει σύμβολο y στην ακολουθία v, τέτοιο ώστε, x<y }

(iv) Θεωρήστε έναν ανελκυστήρα που εξυπηρετεί 3 ορόφους (ισόγειο, πρώτος όροφος, υπόγειο). Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα U και D για να περιγράψουμε ότι ο ανελκυστήρας κατεβαίνει ένα όροφο ή ανεβαίνει ένα όροφο, αντίστοιχα. Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να περιγράψουμε μια ακολουθία κινήσεων του ανελκυστήρα ως μια λέξη στο {U,D}*. *Υποθέτουμε ότι ο ανελκυστήρας ξεκινά από το ισόγειο.* Τότε, η λέξη UDUDD αναπαριστά την κίνηση όπου ο ανελκυστήρας ξεκινώντας από το ισόγειο ανεβαίνει στον πρώτο όροφο, κατεβαίνει στο ισόγειο, ανεβαίνει ξανά στον πρώτο όροφο, και μετά κατεβαίνει στο υπόγειο. Η λέξη ε αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο ανελκυστήρας δεν έχει κινηθεί. Η λέξη DD δεν αναπαριστά κίνηση αφού από το ισόγειο ο ανελκυστήρας δεν μπορεί να κατεβεί δύο φορές (δεν υπάρχει όροφος κάτω από το υπόγειο).

Θεωρήστε τη γλώσσα Λ ⊆ {U,D}* που περιλαμβάνει όλες τις λέξεις που αναπαριστούν δυνατές κινήσεις του ανελκυστήρα. Να δώσετε μια κανονική έκφραση για τη γλώσσα Λ και να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Λύση

(i) Ένας ακέραιος αριθμός, εκτός από το 0, σε δυαδική μορφή που είναι πολλαπλάσιο του 4 τελειώνει σε 00. Επομένως, η δοθείσα γλώσσα περιγράφεται από την πιο κάτω κανονική έκφραση:

$0 \cup 1(0\cup1)^*00$

(ii) Η γλώσσα περιγράφεται από την πιο κάτω κανονική έκφραση:

$b^*a^*abb^*a^*ab(b^*a^+\cup b^+)$

(iii) Η γλώσσα περιγράφεται από την πιο κάτω κανονική έκφραση:

$(0\cup1\cup2)^*\ [\ 0\,0^*\,0 \ \cup\ 1\,(0\cup1)^*1 \ \cup\ 2\,(0\cup1\cup2)^*\,2\ ]$

(iv) Η γλώσσα περιγράφεται από την πιο κάτω κανονική έκφραση:

$((DU)^*\cup(UD)^*)^*(\varepsilon\cup U\cup D)$

Εξήγηση: Από το ισόγειο, ο ανελκυστήρας μπορεί είτε να ανεβοκατεβαίνει στον πρώτο όροφο (UD) ή στο υπόγειο (DU) για οποιοδήποτε αριθμό φορών συνεχόμενα $((DU)^*\cup(UD)^*)^*$ και είτε να τερματίσει στο ισόγειο, είτε να ανεβεί κατά ένα όροφο και να τερματίσει στον πρώτο, είτε να κατεβεί και να τερματίσει στο υπόγειο $(\varepsilon\cup U\cup D)$.

Άσκηση 2

Θεωρήστε το μη ντετερμινιστικό αυτόματο (*Q*, Σ, δ, 1, *F*) με

- **σύνολο καταστάσεων το *Q* = {1, 2, 3, 4, 5, 6},**
- **αλφάβητο το Σ = {*a*,*b*},**
- **σύνολο τελικών καταστάσεων το *F* = {6}, και**
- **συνάρτηση μεταβάσεων δ όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:**

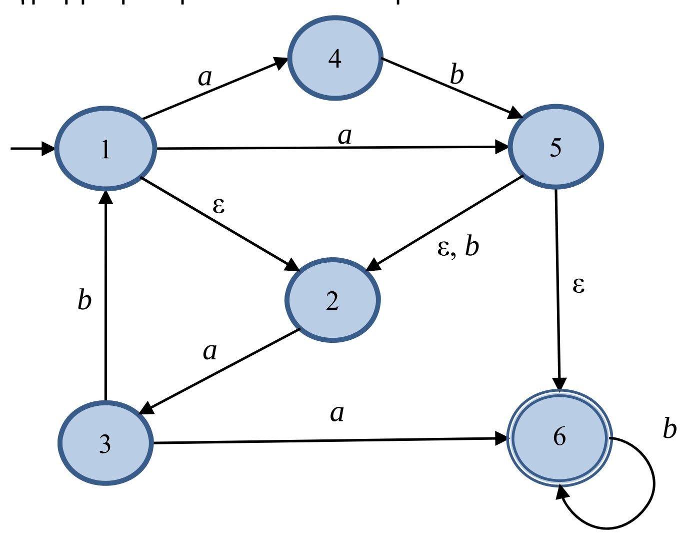
δ	*a*	*b*	ε
1	{4,5}	∅	{2}
2	{3}	∅	∅
3	{6}	{1}	∅
4	∅	{5}	∅
5	∅	{2}	{2,6}
6	∅	{6}	∅

(α) Να παρουσιάσετε το αυτόματο γραφικά μέσω ενός διαγράμματος μεταβάσεων.

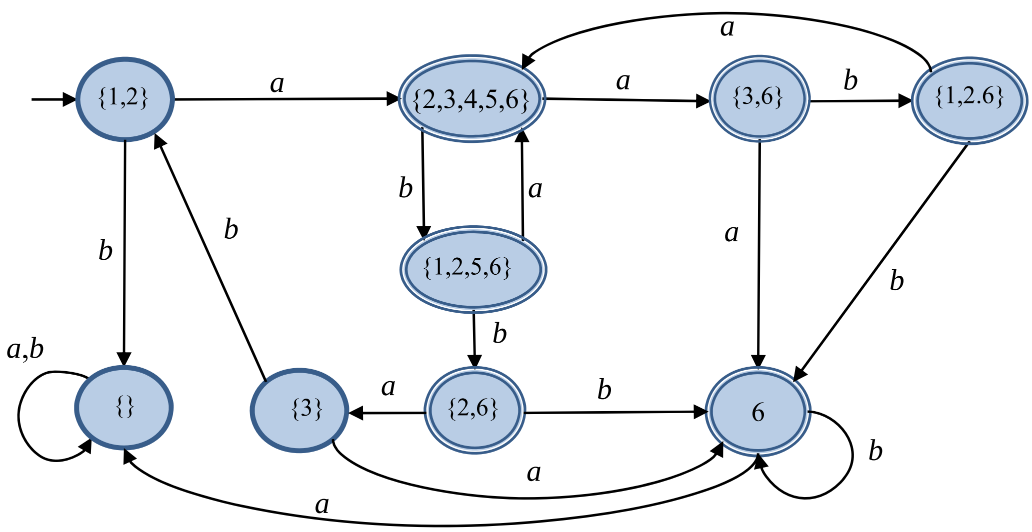
(β) Να μετατρέψετε το αυτόματο από το σκέλος (α) σε ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο χρησιμοποιώντας τον σχετικό αλγόριθμο (Διαφάνειες 2-37 – 2-38).

Λύση

(α) Ακολουθεί το διάγραμμα μεταβάσεων του αυτόματου.



(β) Το ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο είναι το πιο κάτω.



Άσκηση 3

(α) Θεωρήστε τις πιο κάτω γλώσσες:

$Λ_1$ = { w ∈ {a,b}* | ο αριθμός των a στην w είναι πολλαπλάσιο του 3 }

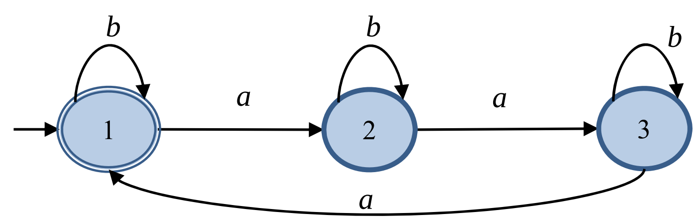
$Λ_2$ = { w ∈ {a,b}* | η w τελειώνει σε a }

(i) Να κατασκευάσετε αυτόματα $Α_1$ και $Α_2$ που να αναγνωρίζουν τις γλώσσες $Λ_1$ και $Λ_2$, αντίστοιχα.

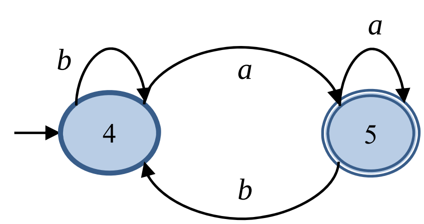
Λύση

Ακολουθούν αυτόματα για τις δύο γλώσσες.

A_1



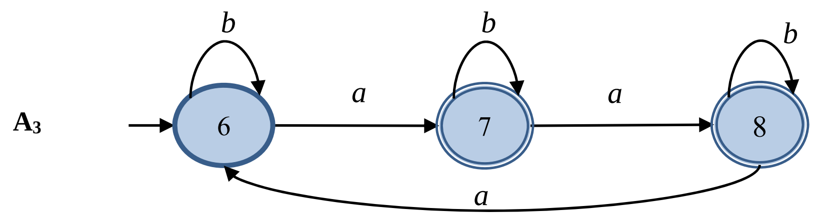
A_2



(ii) Να μετατρέψετε το αυτόματο $Α_1$ σε ένα καινούριο αυτόματο $Α_3$ που να αναγνωρίζει το συμπλήρωμα της γλώσσας $Λ_1$.

Λύση

Για τη ζητούμενη μετατροπή οι τελικές καταστάσεις μετατρέπονται σε μη τελικές και αντίστροφα:

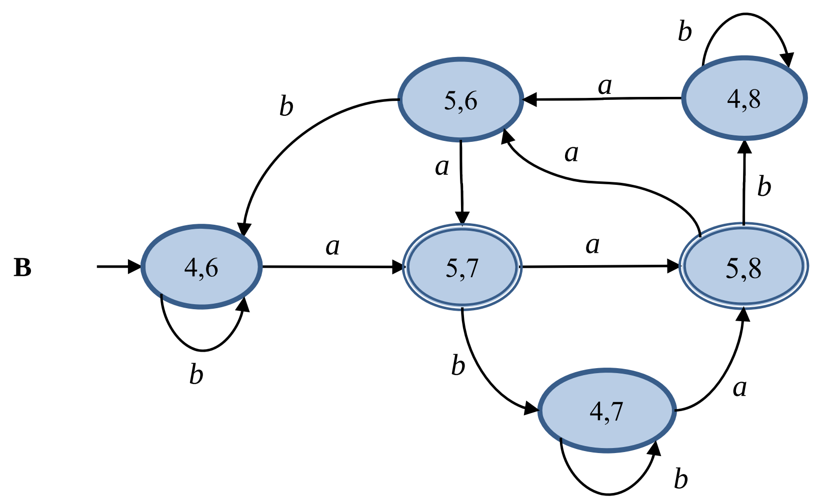


(iii) Να συνδυάσετε τα αυτόματα A_2 και A_3 για να δημιουργήσετε ένα καινούριο αυτόματο B το οποίο να αναγνωρίζει την πιο κάτω γλώσσα:

Λ = { w $\in$ {*a*,*b*}* | ο αριθμός των a στην w *δεν* είναι πολλαπλάσιο του 3 και η w τελειώνει σε *a* }

<u>Λύση</u>

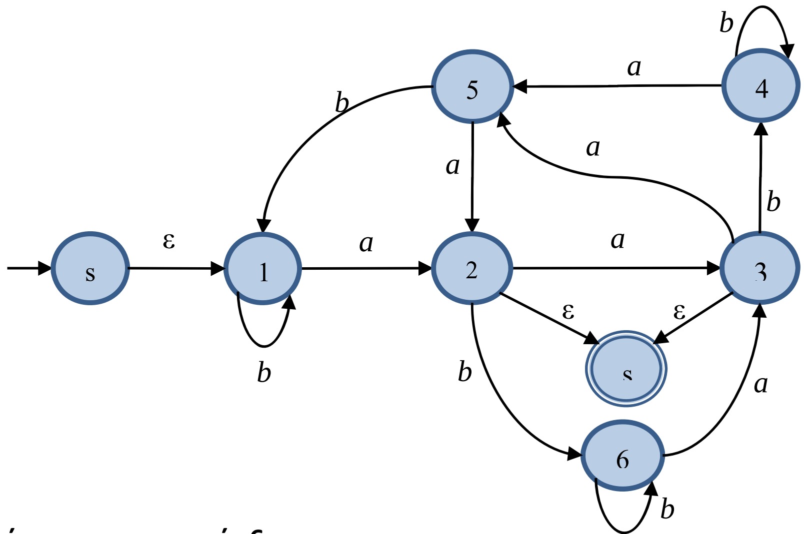
Το ζητούμενο αυτόματο ουσιαστικά αποτελεί το αυτόματο που αποδέχεται την τομή των γλωσσών των αυτομάτων A_2 και A_3 το οποίο δείχνεται πιο κάτω:



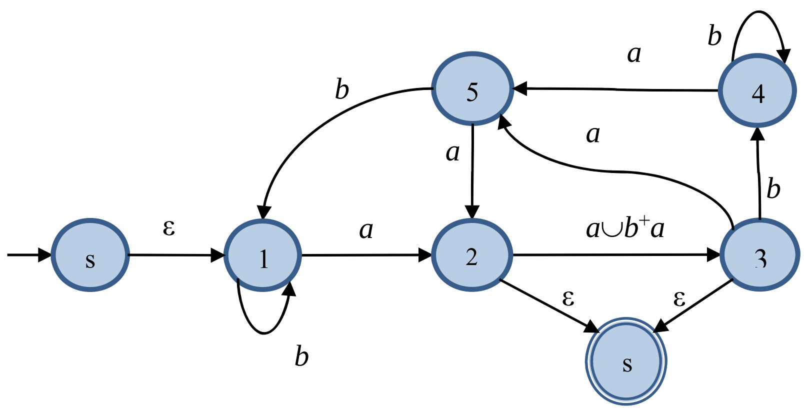
(iv) Να μετατρέψετε το αυτόματο B σε ισοδύναμη κανονική έκφραση χρησιμοποιώντας τον σχετικό αλγόριθμο (Διαφάνεια 3-20).

<u>Λύση</u>

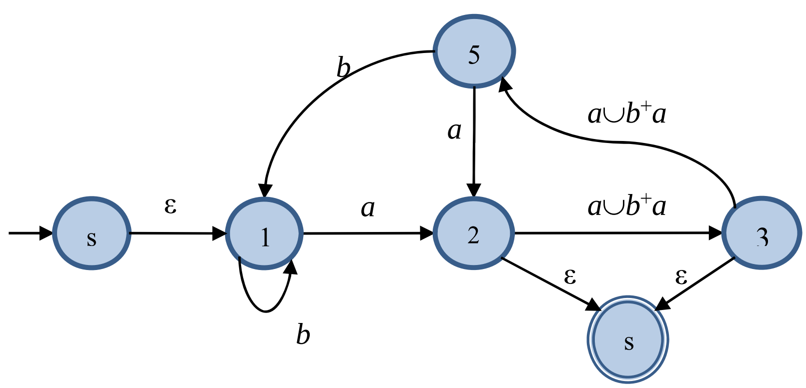
Εισάγουμε καινούρια αρχική κατάσταση και καινούρια τελική κατάσταση δημιουργώντας τις κατάλληλες συνδέσεις. Για ευκολία, μετονομάζουμε τις υπόλοιπες καταστάσεις.



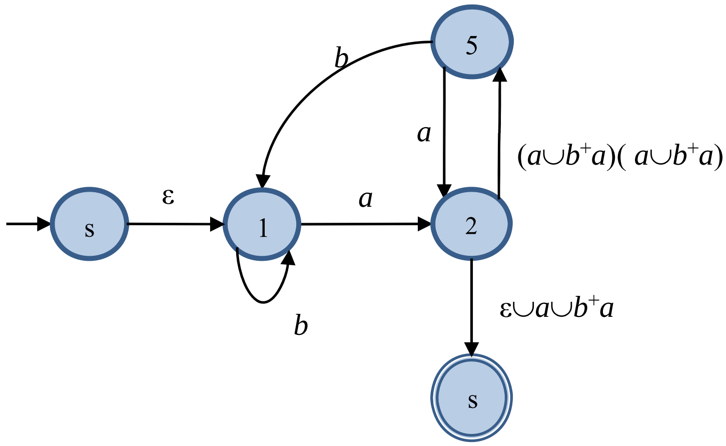
Βήμα 1: Αφαίρεση της κορυφής 6



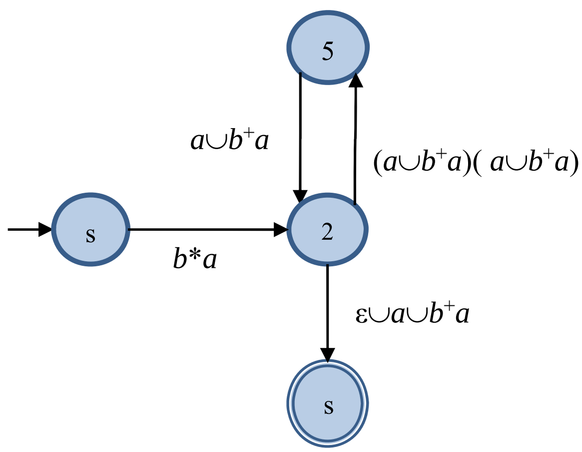
Βήμα 2: Αφαίρεση της κορυφής 4



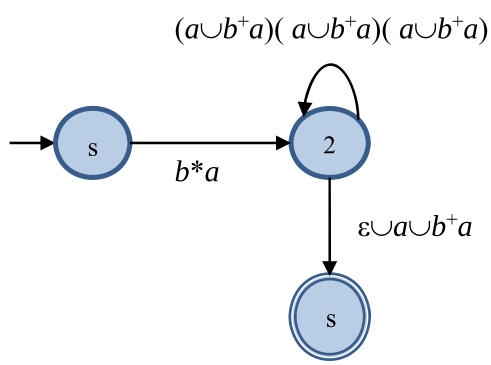
Βήμα 3: Αφαίρεση της κορυφής 3



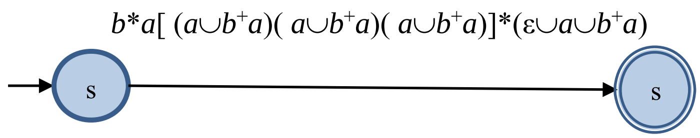
__Βήμα 4: Αφαίρεση της κορυφής 1__



__Βήμα 5: Αφαίρεση της κορυφής 5__



__Βήμα 6: Αφαίρεση της κορυφής 2__



Επομένως, η ζητούμενη κανονική έκφραση είναι η

$$b^*a[\,(a\cup b^+a)(\,a\cup b^+a)(\,a\cup b^+a)]^*(\varepsilon\cup a\cup b^+a).$$

<u>Άσκηση 4</u>

Να αποφασίσετε κατά πόσο οι πιο κάτω γλώσσες είναι κανονικές αιτιολογώντας με ακρίβεια τις απαντήσεις σας.

(α) {$a^m b^n$ | n,m ≥ 0, το m είναι άρτιος ακέραιος αν και μόνο αν το n είναι άρτιος ακέραιος }

<u>Λύση</u>

Η γλώσσα είναι κανονική και περιγράφεται από την κανονική έκφραση:

$$[(aa)^*(bb)^*] \cup [(aa)^*a(bb)^*b]$$

(β) { $c^n a^m c^k b^n$ | n, m, k ≥ 0 }

<u>Λύση</u>

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η γλώσσα

$$L_2 = \{ c^n a^m c^k b^n \mid n, m, k \geq 0 \}$$

είναι κανονική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει p, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από p να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο Λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = c^p a^p c^p b^p$.

Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα, $w = xyz$ όπου η υπολέξη xy βρίσκεται μέσα στις p πρώτες θέσεις της w ($|xy| \leq p$) η y είναι μη κενή ($|y| \neq 0$) και επανάληψη της υπολέξης y διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($xy^iz \in L_2$ για κάθε $i \geq 0$).

Αφού $|xy| \leq p$, τότε πρέπει να ισχύει ότι τόσο το x όσο και το y αποτελούνται μόνο από c. Επομένως, $x = c^\lambda$, $y = c^\mu$, $w = c^\nu a^p c^p b^p$ όπου $\lambda+\mu+\nu = p$.

Επίσης, από το Λήμμα, πρέπει να ισχύει ότι $xy^2z \in L_2$.

Αλλά, $xy^2z = c^\lambda c^\mu c^\mu c^\nu a^p c^p b^p = c^{\lambda+\mu+\mu+\nu} a^p c^p b^p = c^{p+\mu} a^p c^p b^p$ και, από τον ορισμό της γλώσσας, $xy^2z \notin L_2$.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα L_2 είναι κανονική ήταν εσφαλμένη.

(γ) { $(10)^m 1^n$ | m $\geq$ n ≥ 0 }

<u>Λύση</u>

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η γλώσσα

$$L_3 = \{ (10)^m 1^n \mid m \geq n \geq 0 \}$$

είναι κανονική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από *p* να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο Λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = (10)^p1^p$

Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα, $w = xyz$ όπου η υπολέξη *xy* βρίσκεται μέσα στις *p* πρώτες θέσεις της *w* ($|xy| \leq p$) η *y* είναι μη κενή ($|y| \neq 0$) και επανάληψη της υπολέξης *y* διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($xy^iz \in L_3$ για κάθε $i \geq 0$).

Αφού $|xy| \leq p$, τότε πρέπει να ισχύει ότι τόσο το *x* όσο και το *y* βρίσκονται ανάμεσα στα $(10)^p$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις, σε κάθε μια από τις οποίες ισχύει $\lambda>0$:

- $x = (01)^\mu$, $y = (01)^\lambda$, $w = (10)^\nu 1^p$ όπου $\lambda+\mu+\nu = p$
- $x = (01)^\mu$, $y = (01)^\lambda 1$, $w = 0(10)^\nu 1^p$ όπου $\lambda+\mu+\nu+1= p$
- $x = (01)^\mu 0$, $y = 1(01)^\lambda$, $w = (10)^\nu 1^p$ όπου $\lambda+\mu+\nu+1 = p$
- $x = (01)^\mu 0$, $y = 1(01)^\lambda 0$, $w = 1(10)^\nu 1^p$ όπου $\lambda+\mu+\nu+2 = p$

Επίσης, από το Λήμμα, πρέπει να ισχύει ότι $xy^0z \in L_3$. Αναλύουμε κάθε μια από τις πιο πάνω περίπτώσεις ξεχωριστά:

- $xy^0z = (10)^{\nu+\mu}1^p \notin L_3$ αφού $\nu+\mu<p$
- $xy^0z = (01)^\mu 0(10)^\nu 1^p \notin L_3$ αφού έχει επηρεαστεί η δομή της λέξης
- $xy^0z = (01)^\mu 0(10)^\nu 1^p \notin L_3$ αφού έχει επηρεαστεί η δομή της λέξης
- $xy^0z = (01)^\mu 01(10)^\nu 1^p \notin L_3$ αφού $\mu+\nu+1 < p$.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα L_3 είναι κανονική ήταν εσφαλμένη.

(δ) $\{ (10)^m1(01)^n \mid m \geq n \geq 0 \}$

<u>Λύση</u>

Η γλώσσα είναι κανονική και περιγράφεται από την κανονική έκφραση (10)*1

(ε) $\left\{ \boldsymbol{a^{n^3}} \middle| \boldsymbol{n \geq 0} \right\}$

<u>Λύση</u>

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η

$L_5 = \left\{ \boldsymbol{a^{n^3}} \middle| \boldsymbol{n \geq 0} \right\}$ είναι κανονική.

Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από *p* να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο Λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $\mathrm{w} = \mathrm{a}^{p^3}$. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα, $w = xyz$ όπου η *xy* βρίσκεται μέσα στις *p* πρώτες θέσεις της *w* ($|xy| \leq p$), η *y* είναι μη κενή ($|y| \neq 0$) και επανάληψη της *y* διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($xy^iz \in L_5$ για κάθε $i \geq 0$).
Αφού $|xy| \leq p$, τότε πρέπει να ισχύει ότι $x = a^\lambda$, $y = a^\mu$, $z = a^{p^3-\lambda-\mu}$ και $\lambda+\mu \leq p$.

Επίσης, από το λήμμα, πρέπει να ισχύει ότι $xy^2z \in L_5$.

Έχουμε ότι $xy^2z = a^{p^3+\mu}$.

Για να ανήκει η λέξη στη γλώσσα πρέπει $\mathrm{p}^3 + \mu = \mathrm{q}^3$ για κάποιο ακέραιο q. Αλλά

$\mathrm{p}^3 + \mu > \mathrm{p}^3$ και

$\mathrm{p}^3 + \mu < (\mathrm{p}+1)^3 = \mathrm{p}^3 + 3\mathrm{p}^2 + 3\mathrm{p} + 1$ για τον λόγο ότι $\mu \le \mathrm{p}$.

Αφού η ποσότητα $\mathrm{p}^3 + \mu$ βρίσκεται ανάμεσα στις δύο τιμές, και δεν ισούται με καμιά από αυτές, είναι αδύνατο να υπάρχει q τέτοιο ώστε $\mathrm{p}^3 + \mu = \mathrm{q}^3$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $xy^2z \notin L_5$ και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα L_5 είναι κανονική ήταν εσφαλμένη.

Άσκηση 5

Ένα πεπερασμένο *αυτόματο με απαγορεύσεις* (για συντομία ΠΑΑ) αποτελεί μια πλειάδα (Q, Σ, δ, q_0, F), όπου Q είναι το σύνολο καταστάσεων του αυτόματου, με q_0 την αρχική κατάσταση, F το σύνολο με τις καταστάσεις αποδοχής του αυτόματου, Σ το αλφάβητο του αυτομάτου, και δ: (Q x($\Sigma \cup \overline{\Sigma}$)) → Q τη συνάρτηση μεταβάσεων του αυτόματου. Η διαφορά ενός ΠΑΑ από ένα DFA εντοπίζεται στο γεγονός ότι οι μεταβάσεις του μεταγράφονται με σύμβολα από το σύνολο $\Sigma \cup \overline{\Sigma}$, όπου $\overline{\Sigma} = \{\overline{a} | a \in \Sigma\}$. Διαισθητικά, αν δ(q, $\overline{a}$) = t, τότε κάθε φορά που το αυτόματο βρίσκεται στην κατάσταση q και το σύμβολο εισόδου *δεν είναι* το a, το αυτόματο προχωρά στην κατάσταση t.

Να αποδείξετε ότι η κλάση των γλωσσών που αποδέχονται τα ΠΑΑ είναι η ίδια με την κλάση των γλωσσών που αποδέχονται τα DFA, δηλαδή, οι κανονικές γλώσσες.

Λύση

Θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε ΠΑΑ υπάρχει ισοδύναμο πεπερασμένο αυτόματο και αντίστροφα.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε ντετερμινιστικό αυτόματο υπάρχει και ισοδύναμο ΠΑΑ. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε εισάγοντας μια καινούρια κατάσταση στο αυτόματο και να προσθέσουμε προς αυτήν μεταβάσεις για κάθε σύμβολο του $\overline{\Sigma}$ από κάθε κατάσταση του αυτόματου. Η κατάσταση αυτή θα διαθέτει ακμή για κάθε σύμβολο του $\Sigma \cup \overline{\Sigma}$ προς τον εαυτό της.

Για την αντίθετη κατεύθυνση, ας θεωρήσουμε ένα ΠΑΑ Π = $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Θα κτίσουμε ένα ισοδύναμο NFA $N = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ όπου:

- Q' = (το δυναμοσύνολο του Q)
- Για κάθε $R \in Q'$ και $a \in \Sigma$, θέτουμε

  $\delta'(R,a) = \{ q \in Q \mid q = \delta(r,a)$ ή $q = \delta(r, \overline{b})$ για κάποιο $r \in R$ και κάθε $b \in \Sigma - \{a\} \}$
- $q_0' = \{q_0\}$
- $F' = \{R' \in Q' \mid$ υπάρχει κατάσταση του R' που αποτελεί κατάσταση αποδοχής του N$\}$

Η κατασκευή αυτή συλλαμβάνει ότι στο αυτόματο Π, μια μετάβαση a από μια κατάσταση *p*, μπορεί να μεταφέρει το αυτόματο στην κατάσταση που οδηγεί η *a*-μετάβαση από την *p* στο Π, όπως επίσης και στις καταστάσεις που μεταφέρουν το *p* στο Π, όλες οι μεταβάσεις τύπου $\overline{b}$, $b \neq a$, αφού το 'όχι *b*' περιλαμβάνει το *a*.

Η ισοδυναμία των δύο αυτόματων προκύπτει από την παρατήρηση ότι σε κάθε βήμα του υπολογισμού του *N* επί κάποιας εισόδου, το *N* βρίσκεται σε μια κατάσταση που αντιστοιχεί στο σύνολο των καταστάσεων που θα μπορούσε να βρίσκεται το Π στο σημείο εκείνο. Από τον ορισμό του N, αυτό θα αποδεχθεί όντας σε κατάσταση R η οποία περιέχει τουλάχιστον μια τελική κατάσταση του Π. Επομένως θα αποδεχθεί αν το Π οδηγείται σε τελική κατάσταση σε έστω μια από τις δυνατές εκτελέσεις της λέξης εισόδου.

Αποδεικνύουμε το ζητούμενο ως εξής:
Ας υποθέσουμε ότι $w = w_1 w_2 \ldots w_n \in L(\Pi)$. Τότε, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1, \ldots, r_n$ του Q που ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $r_0 = q_0$,
2. $r_{i+1} = \delta(r_i, x_{i+1})$, για $i = 0,\ldots,n-1$, όπου είτε $x_{i+1} = w_{i+1}$ είτε $x_{i+1} = \overline{v_{i+1}}$ με $v_{i+1} \neq w_{i+1}$, και
3. $r_n \in F$

Τότε υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $\{r_0\}, R_1, \ldots, R_n$ στο αυτόματο N, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $r_{i+1} \in R_{i+1} = \delta'(R_i, w_{i+1})$, για $i = 0,\ldots,n-1$, και
2. $r_n \in R_n$.

Αυτό συνεπάγεται ότι $w \in L(N)$. Επομένως, αν $w \in L(\Pi)$ τότε $w \in L(N)$.
Αντιστρέφοντας τα πιο πάνω επιχειρήματα, λαμβάνουμε ότι αν $w \in L(N)$ τότε $w \in L(\Pi)$. Ως εκ τούτου τα N και Π αποδέχονται τις ίδιες λέξεις και το ζητούμενο έπεται.