Φροντιστήριο 11 - Λύσεις

<u>Άσκηση 1</u>

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες *δεν* είναι διαγνώσιμες.

(α) { ⟨M⟩ | η M είναι μια TM με αλφάβητο εισόδου το {0,1} η οποία αποδέχεται ακριβώς δύο λέξεις }

<u>Λύση</u>

Θέλουμε να δείξουμε ότι η γλώσσα

ΔΥΟ = {⟨M,k⟩ | η M είναι μια TM με αλφάβητο εισόδου το {0,1} η οποία αποδέχεται ακριβώς δύο λέξεις }

είναι μη διαγνώσιμη. Για να το δείξουμε θα αναγάγουμε μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την A_{TM}, στην υπό μελέτη γλώσσα ΔΥΟ.

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα ΔΥΟ είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη R θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη S για το πρόβλημα A_{TM}. Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η ΔΥΟ είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

Ο διαγνώστης S έχει ως εξής:

S = "Με είσοδο ⟨M,w⟩

1. Φτιάξε τη TM M' η οποία με είσοδο x:
   (α) Αν x = 0 τότε τρέχει την M με είσοδο w.
   (β) Αν x = 1 τότε τρέχει την M με είσοδο w.
   (γ) Διαφορετικά, απορρίπτει.
2. Τρέξε την R με είσοδο ⟨M'⟩.
3. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ.
4. Αν η R απορρίψει ΑΠΟΡΡΙΨΕ.

Εξετάζοντας την πιο πάνω μηχανή παρατηρούμε ότι η μηχανή M' αποδέχεται ακριβώς δύο λέξεις (τις λέξεις 0 και 1) αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w. Ως εκ τούτου, με είσοδο τη μηχανή M', ο διαγνώστης R θα αποδεχτεί αν και μόνο αν η μηχανή M' αποδέχεται δύο λέξεις ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

(β) { ⟨M⟩ | η M είναι μια TM η οποία δεν θα γράψει ποτέ το σύμβολο 0 στην ταινία δύο συνεχόμενες φορές}

<u>Λύση</u>

Θέλουμε να δείξουμε ότι η γλώσσα
$ΔΥΟ_0$ = { ⟨M⟩ | η M είναι μια TM η οποία δεν θα γράψει ποτέ το σύμβολο 0 στην ταινία δύο συνεχόμενες φορές}

είναι μη διαγνώσιμη. Για να το δείξουμε θα αναγάγουμε σε αυτή μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την A_{TM}. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα $ΔΥΟ_0$ είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη R θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη S για το πρόβλημα A_{TM}. Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η $ΔΥΟ_0$ είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

S := “Με είσοδο ⟨M,w⟩

1. Φτιάξε μια παραλλαγή της M, έστω M’ ως εξής:
   i. Μετάτρεψε τη M σε μια TM η οποία αντί του 0 να χειρίζεται κάποιο άλλο σύμβολο, π.χ. το X. Δηλαδή, σε κάθε μετάβαση της μηχανής που αναφέρεται στο σύμβολο 0, αντικατάστησε το 0 από X.
   ii. Επιπρόσθετα πρόσθεσε στη μηχανή που έφτιαξες στο Βήμα 1, από μια μηχανή, όπου από την κατάσταση αποδοχής να ακολουθεί ένα μονοπάτι από δύο μεταβάσεις οι οποίες να γράφουν 2 φορές το σύμβολο 0 στην ταινία. Καινούρια κατάσταση αποδοχής του αυτόματου που προκύπτει να είναι η κατάσταση στην οποία οδηγούν οι δύο αυτές μεταβάσεις. Κατά συνέπεια το καινούριο αυτόματο τρέχει λέξεις με τον ίδιο τρόπο όπως και η M αλλά στη συνέχεια γράφει το σύμβολο 0 δύο συνεχόμενες φορές στην ταινία.
2. Τρέξε την S με δεδομένο εισόδου την M΄ και την w.
3. Αν η S αποδεχτεί τότε αποδέξου.
4. Αν η S απορρίψει τότε απόρριψε.

Προφανώς, κάθε φορά που η μηχανή M’ γράφει ένα μη κενό χαρακτήρα στη δεύτερη ταινία της, η μηχανή M_1 έχει φτάσει στην κατάσταση αποδοχής. Αφού όμως η M_1 είναι ισοδύναμη με την M, και η M θα αποδεχόταν με την ίδια είσοδο. Επομένως, αν η μηχανή S αποδεχτεί την είσοδο ⟨M,w⟩ αυτό συνεπάγεται ότι η μηχανή M αποδέχεται το w, και αντίστροφα. Συνεπώς η S αποτελεί διαγνώστη για τη γλώσσα A_{TM} γεγονός που μας οδηγεί σε αντίφαση στην υπόθεσή μας ότι η γλώσσα ΜΚ είναι διαγνώσιμη.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

(γ) { ⟨M⟩ | η M είναι μια TM η οποία αποδέχεται τη γλώσσα {ww | w $\in$ $\{a,b\}^*$} }

<u>Λύση</u>

Θέλουμε να δείξουμε ότι η γλώσσα

Double = {⟨M ⟩ | η M είναι μια TM η οποία αποδέχεται τη γλώσσα {ww | w $\in$ $\{a,b\}^*$} }

είναι μη διαγνώσιμη. Για να το δείξουμε θα αναγάγουμε μια γνωστή μη διαγνώσιμη γλώσσα, την A_{TM}, στην υπό μελέτη γλώσσα Double.

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η γλώσσα Double είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Με βάση τον διαγνώστη R θα κατασκευάσουμε ένα διαγνώστη S για το πρόβλημα A_{TM}. Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η Double είναι μια μη διαγνώσιμη γλώσσα.

Ο διαγνώστης S έχει ως εξής:

S = “Με είσοδο ⟨M,w⟩

1. Φτιάξε τη TM M’ η οποία με είσοδο x:
   (α) Αν η $x = x_1x_2$, $x_1 = x_2$ τότε τρέχει την M με είσοδο w.
   (β) Διαφορετικά, απορρίπτει.
2. Τρέξε την R με είσοδο ⟨M’⟩.
3. Αν η R αποδεχτεί ΑΠΟΔΕΞΟΥ.

4. Αν η R απορρίψει ΑΠΟΡΡΙΨΕ.

Εξετάζοντας την πιο πάνω μηχανή παρατηρούμε ότι η μηχανή M' αποδέχεται όλες τις λέξεις x που μπορούν να σπάσουν ως $x = x_1x_2$, $x_1 = x_2$, αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w. Ως εκ τούτου, με είσοδο τη μηχανή M', ο διαγνώστης R θα αποδεχτεί αν και μόνο αν η μηχανή M' αποδέχεται την κανονική γλώσσα Σ^* ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η μηχανή M αποδέχεται τη λέξη w.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι η κλάση P είναι κλειστή ως προς τις πράξεις της ένωσης, της συναρμογής και του συμπληρώματος.

Λύση

Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

(α) Ένωση: Αν οι Λ_1 και Λ_2 είναι γλώσσες της P, τότε και η $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ ανήκει στην P.

(β) Συναρμογή: Αν οι Λ_1 και Λ_2 είναι γλώσσες της P, τότε και η $\Lambda_1 \Lambda_2$ ανήκει στην P.

(γ) Συμπλήρωμα: Αν η Λ είναι γλώσσα της P, τότε και η $\Sigma^* - \Lambda$ ανήκει στην P.

(α) Έστω Λ_1 και Λ_2 γλώσσες της P. Από τον ορισμό της κλάσης P, υπάρχουν TM, έστω M_1 και M_2 οι οποίες διαγιγνώσκουν τις Λ_1 και Λ_2, αντίστοιχα, σε πολυωνυμικό χρόνο. Για να δείξουμε ότι και η $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ ανήκει στην P θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει TM η οποία διαγιγνώσκει τη γλώσσα $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ σε πολυωνυμικό χρόνο. Η ζητούμενη μηχανή είναι η εξής:

M := "Για είσοδο w

1. Τρέξε την M_1 στην w. Αν η M_1 αποδεχτεί, τότε αποδεχόμαστε.
2. Διαφορετικά, τρέξε την M_2 στην w. Αν η M_2 αποδεχτεί, τότε αποδεχόμαστε
3. Διαφορετικά, απορρίπτουμε."

Ορθότητα: Η M αποδέχεται αν και μόνο αν η w είναι αποδεκτή από την M_1 ή την M_2. Επομένως, από τον ορισμό των M_1 και M_2, η M αποδέχεται αν και μόνο αν η $w \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.

Χρόνος εκτέλεσης: Αφού οι M_1 και M_2 έχουν πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης, τόσο το Βήμα 1 όσο και το Βήμα 2 εκτελούνται σε πολυωνυμικό χρόνο. Συνεπώς, η M διαγιγνώσκει τη γλώσσα $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ σε πολυωνυμικό χρόνο.

(β) Έστω Λ_1 και Λ_2 γλώσσες της P. Από τον ορισμό της κλάσης P, υπάρχουν TM, έστω M_1 και M_2 οι οποίες διαγιγνώσκουν τις Λ_1 και Λ_2, αντίστοιχα, σε πολυωνυμικό χρόνο. Για να δείξουμε ότι και η $\Lambda_1\Lambda_2$ ανήκει στην P θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει TM η οποία διαγιγνώσκει τη γλώσσα $\Lambda_1\Lambda_2$ σε πολυωνυμικό χρόνο. Η ζητούμενη μηχανή είναι η εξής:

M := "Για είσοδο w

Για κάθε δυνατό σπάσιμο της w σε δύο μέρη w = xy

1. Τρέξε την M_1 στην x. Αν η M_1 αποδεχτεί, τότε προχώρα στο βήμα 2, διαφορετικά επανάλαβε το βήμα για το επόμενο σπάσιμο της w.
2. Τρέξε την M_2 στην y. Αν η M_2 αποδεχτεί, τότε αποδεχόμαστε, διαφορετικά, επανέλαβε από το βήμα 2 για το επόμενο σπάσιμο της w.

3. Αν τα δυνατά σπασίματα έχουν εξαντληθεί, τότε απόρριψε.”

Ορθότητα: Η Μ αποδέχεται αν και μόνο αν υπάρχει σπάσιμο w = xy όπου η x είναι αποδεκτή από την M_1 και η y από την M_2. Επομένως, από τον ορισμό των M_1 και M_2, η Μ αποδέχεται την w αν και μόνο αν υπάρχει σπάσιμο w = xy όπου $x \in Λ_1$ και $y \in Λ_2$.

Χρόνος εκτέλεσης: Αφού οι M_1 και M_2 έχουν πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης, τόσο το Βήμα 1 όσο και το Βήμα 2 εκτελούνται σε πολυωνυμικό χρόνο. Επιπλέον, αφού υπάρχουν ακριβώς n + 1 δυνατά σπασίματα της w, όπου n = |w|, η Μ θα εκτελέσει O(n) επαναλήψεις των δύο βημάτων και επομένως είναι σε θέση να διαγνώσει τη γλώσσα $Λ_1Λ_2$ σε πολυωνυμικό χρόνο.

(γ) Έστω Λ γλώσσα της P. Από τον ορισμό της κλάσης P, υπάρχει TM, έστω Μ η οποία διαγιγνώσκει τη Λ σε πολυωνυμικό χρόνο. Για να δείξουμε ότι και $Σ^* – Λ$ ανήκει στην P θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει TM η οποία διαγιγνώσκει τη γλώσσα $Σ^* – Λ$ σε πολυωνυμικό χρόνο. Η ζητούμενη μηχανή είναι η εξής:

M’ := “Για είσοδο w
1. Τρέξε την Μ στην w. Αν η Μ αποδεχτεί, τότε απορρίπτουμε.
2. Διαφορετικά, αποδεχόμαστε.”

Ορθότητα: Η Μ’ αποδέχεται την w αν και μόνο αν η Μ δεν αποδέχεται την w. Επομένως, η Μ’ αποδέχεται αν και μόνο αν η $w \notin Λ$ ή $w \in Σ^* – Λ$.

Χρόνος εκτέλεσης: Αφού η Μ έχει πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης η Μ’ έχει επίσης πολυωνυμικό χρόνο εκτέλεσης και το ζητούμενο έπεται.